

Dynamique et Optimisation des Vibrations de Canon

De la théorie balistique à la simulation par éléments finis

Table des matières

1	Introduction : principes de la compensation positive	1
1.1	Le défi du tir de précision	1
1.2	Pourquoi une variation de vitesse fait varier le point d'impact	1
1.3	Le canon vibre comme un diapason	1
1.4	Ce qui détermine l'ampleur des vibrations	2
1.5	Le principe de la compensation positive	2
1.6	Le rôle du tuner	2
1.7	Synthèse intuitive	3
1.8	Plan du document	3
2	Notations et conventions	4
3	Développement Mathématique	6
3.1	Modèle continu : poutre d'Euler–Bernoulli	6
3.2	Discrétisation par éléments finis	6
3.3	Assemblage, conditions aux limites et intégration du tuner	7
3.4	Modélisation de l'excitation dynamique	8
3.5	Schéma d'intégration temporelle de Newmark- β	9
4	Analyse modale et sensibilité au tuner	10
4.1	Problème aux valeurs propres	10
4.2	Sensibilité par le quotient de Rayleigh	10
4.3	Décomposition modale et réponse en régime transitoire	11
5	Cinématique de bouche et compensation positive	12
5.1	Temps de parcours et angle de bouche	12
5.2	Couplage entre dispersion de vitesse et dispersion verticale	12
5.3	Nœud spatial <i>vs</i> nœud temporel : précision sémantique	13
5.4	Confirmation expérimentale (Kolbe, 2015)	14
5.5	Validation par simulation MEF + Newmark- β	15
6	Conclusions pratiques pour le tireur	15

1 Introduction : principes de la compensation positive

Cette première section présente le *pourquoi* et le *comment* de la compensation positive sans recours aux outils mathématiques. Un lecteur curieux qui souhaite seulement comprendre l'idée et son intérêt pratique peut s'arrêter à la fin de la section 1.8 ; les parties suivantes développent ensuite la modélisation rigoureuse et la simulation numérique.

1.1 Le défi du tir de précision

Dans les disciplines de tir de précision (couché à 50 mètres ISSF par exemple), la recherche du groupement parfait se heurte aux limites physiques de la munition. Même avec des lots de cartouches de qualité *match*, il subsiste une variation inévitable de la vitesse de sortie du canon — la *vitesse initiale* — d'une cartouche à l'autre. Cette variation, souvent mesurée en pieds par seconde (fps), est typiquement de l'ordre de quelques pour cent.

1.2 Pourquoi une variation de vitesse fait varier le point d'impact

Une balle plus lente passe plus de temps en vol pour atteindre la cible et subit donc l'accélération de la pesanteur plus longtemps : elle tombe davantage. Mécaniquement, en cible, cela se traduit par un impact plus bas qu'une balle rapide tirée avec le même réglage. Si le canon était un tube parfaitement rigide et immobile, la dispersion des vitesses des cartouches se traduirait inévitablement par une *traînée verticale* sur la cible : les balles rapides en haut, les lentes en bas.

1.3 Le canon vibre comme un diapason

En réalité, lorsque le coup part, le canon ne reste pas immobile : il se met à vibrer. L'explosion de la poudre, le recul de l'arme, la course du projectile dans le tube et son frottement contre les rayures excitent des oscillations transversales — c'est-à-dire de bas en haut et de gauche à droite — qui font bouger la bouche du canon de quelques centièmes de degré, à la manière d'un diapason qui sonne après un choc. Ces vibrations durent plusieurs dizaines de millisecondes, bien au-delà du temps que met la balle pour parcourir le canon (typiquement 2 à 3 millisecondes).

Pendant ces 2 à 3 millisecondes, la bouche du canon est donc en mouvement : elle monte, redescend, repasse par sa position d'équilibre, etc. L'angle exact avec lequel la balle sort dépend non seulement de la visée du tireur, mais aussi de *l'instant précis* de la sortie.

1.4 Ce qui détermine l'ampleur des vibrations

D'où vient cette mise en branle ? La source dominante, soulignée par G. Kolbe [7], est le *recul* : sous la poussée des gaz, l'arme entière part en arrière et *pivote autour de son centre de gravité*. Or l'axe du canon (la ligne de l'âme, par où sort la balle) passe *au-dessus* de ce centre de gravité ; la poussée de recul s'exerce donc avec un *bras de levier* et imprime un couple à l'arrière du canon, exactement comme une chiquenaude donnée hors du centre fait basculer une règle posée sur la table. Ce couple est le « coup de marteau » qui fait sonner le diapason.

Deux grandeurs concrètes commandent alors l'*amplitude* du mouvement de bouche :

- le **poids total de l'arme** : une arme lourde encaisse le recul en bougeant moins, donc vibre moins ;
- la **hauteur de l'âme au-dessus du centre de gravité** : plus ce bras de levier est grand, plus le couple — et donc l'amplitude — est important.

Ces deux paramètres n'apparaissent pas dans le réglage du tuner (qui agit sur le *rythme* des vibrations, pas sur leur cause), mais ils expliquent pourquoi deux carabines de canon identique mais de montage différent ne se règlent pas pareil. Ils seront réintroduits formellement à la section 3.4 comme le moment d'excitation $M_0(t)$.

1.5 Le principe de la compensation positive

L'idée géniale, proposée dès 1901 par A. Mallock [8] et formalisée pour le tir moderne par G. Kolbe (Border Barrels) [5, 6], est d'*exploiter* ces vibrations plutôt que de les subir. Si l'on parvient à régler le canon de sorte que la bouche soit en train de *monter* au moment précis où la balle en sort, alors :

- une balle **rapide** sort un peu *en avance* : à ce moment, le canon n'a pas encore eu le temps de beaucoup remonter, et la balle est lancée avec un angle plus *bas* (figure 1, trajectoire rouge) ;
- une balle **lente** sort un peu *en retard* : le canon a continué à se relever, et la balle est lancée avec un angle plus *haut* (trajectoire bleue).

La balle lente est donc projetée *plus haut* initialement ; en cible, son surcroît de chute (parce qu'elle a volé plus longtemps) est exactement compensé par son surcroît de hauteur de départ. Toutes les balles, rapides ou lentes, peuvent ainsi se retrouver au *même* point d'impact. C'est ce que Kolbe appelle la *positive compensation*.

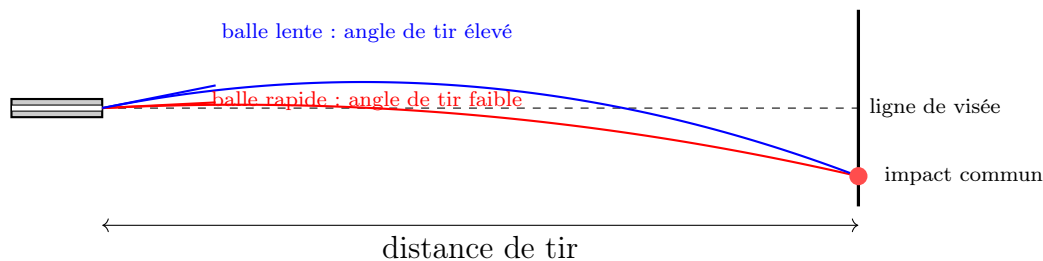


FIGURE 1 – Principe géométrique de la compensation positive. Si la bouche du canon est en train de monter lorsque les balles en sortent, les balles plus lentes (qui sortent plus tard) bénéficient d'un angle de lancement supérieur. Leur surcroît de hauteur de départ compense le surcroît de chute dû à leur vol prolongé, et toutes les balles peuvent se retrouver au même point d'impact en cible.

1.6 Le rôle du tuner

Pour que ce phénomène se produise, encore faut-il *accorder* les vibrations du canon avec le temps de sortie de la balle — d'où le terme *tuner*, qui désigne une masse mobile (typiquement 100 à 400 grammes) fixée à la bouche du canon. En vissant ou en dévissant cette masse, le tireur la rapproche ou l'éloigne de la bouche, ce qui modifie subtilement la fréquence de vibration du canon. Cela revient à ajuster le rythme du « diapason » : on rallonge ou raccourcit le temps qu'il faut à la bouche pour repasser par sa position d'équilibre, afin que cet instant tombe pile au moment où la balle moyenne sort.

Tout changement de munition ou même de lot demande en principe un nouveau réglage, puisque la vitesse moyenne — et donc le temps de parcours dans le canon — change. Les tireurs procèdent typiquement par essais successifs (méthode dite du *ladder* ou *Audette* [9]) : on tire plusieurs séries en changeant la position du tuner d'un cran à chaque fois, et on retient la position pour laquelle les groupements se resserrent le plus.

1.7 Synthèse intuitive

En résumé, la compensation positive demande trois ingrédients :

1. un canon qui vibre suffisamment pour bouger sensiblement entre la sortie d'une balle rapide et celle d'une balle lente ;
2. un *accord* de ces vibrations qui place le moment de sortie de la balle moyenne au bon point de l'oscillation (la phase *ascendante*) ;
3. un compromis quantitatif entre vitesse du mouvement angulaire et chute balistique : un canon qui se relève trop lentement ne compensera pas assez la dispersion, et un canon qui se relève trop vite la sur-compensera.

Les sections suivantes formalisent chacun de ces trois ingrédients et montrent comment les paramètres physiques du canon, du tuner et de la munition se combinent pour atteindre l'optimum.

1.8 Plan du document

Le reste du document développe la théorie et la simulation :

- Section 2 : liste des notations et conventions utilisées.
- Section 3 : modélisation mathématique du canon (poutre d'Euler-Bernoulli, méthode des éléments finis, intégration par Newmark- β).
- Section 4 : analyse des fréquences propres et sensibilité au tuner.
- Section 5 : critère mathématique de la compensation positive, distinction nœud / ventre temporel, confirmation expérimentale de Kolbe et validation par la simulation numérique.
- Section 6 : conclusions pratiques pour le tireur.

2 Notations et conventions

On adopte le système d'unités SI (m, kg, s, Pa, rad). L'axe x est aligné avec l'âme du canon, orienté de la culasse ($x = 0$) vers la bouche ($x = L$). L'axe y est transverse, orienté vers le haut. Sauf mention contraire, les angles sont en radians ; les conversions usuelles sont $1 \text{ MOA} = \pi / (180 \times 60) \text{ rad} \approx 2,909 \times 10^{-4} \text{ rad}$ et $1 \text{ mrad} \approx 3,438 \text{ MOA}$.

Symbole	Signification	Unité
<i>Géométrie et matériau du canon</i>		
L	Longueur du canon	m
$D_{\text{ext}}, D_{\text{int}}$	Diamètres extérieur (profil) et intérieur (âme)	m
A	Aire de section transverse $\frac{\pi}{4}(D_{\text{ext}}^2 - D_{\text{int}}^2)$	m ²
I	Moment quadratique $\frac{\pi}{64}(D_{\text{ext}}^4 - D_{\text{int}}^4)$	m ⁴
E	Module d'Young (acier ≈ 200 GPa)	Pa
ρ	Masse volumique (acier ≈ 7850 kg/m ³)	kg/m ³
EI	Rigidité en flexion	N·m ²
ρA	Masse linéique	kg/m
<i>Cinématique de la poutre</i>		
$y(x, t)$	Déflexion transverse au point x et à l'instant t	m
$\theta(x, t) \equiv \partial y / \partial x$	Pente / angle de fibre neutre	rad
$\theta(L, t)$	Angle à la bouche du canon (angle de tir)	rad
$\dot{\theta} = \partial \theta / \partial t$	Vitesse angulaire de bouche	rad/s
<i>Tuner</i>		
m_t	Masse du tuner (typiquement 100–400 g)	kg
J_t	Moment d'inertie transverse du tuner	kg·m ²
<i>Modes propres</i>		
ω_n	Pulsation propre du mode n	rad/s
$f_n = \omega_n / (2\pi)$	Fréquence propre du mode n	Hz
$T_n = 1 / f_n$	Période propre du mode n	s
$\phi_n(x)$	Forme spatiale du mode n	—
ζ_n	Taux d'amortissement modal	—
<i>Projectile et balistique interne</i>		
m_p	Masse du projectile (.22 LR : $\approx 2,6$ g)	kg
$v(x, t)$	Vitesse du projectile à l'abscisse x	m/s
v_0, v_{muzzle}	Vitesse initiale (à la sortie de la bouche)	m/s
\bar{v}	Vitesse moyenne effective dans le canon	m/s
t_b	Temps de parcours du projectile dans le canon	s
$p(t)$	Pression dans la chambre / l'âme	Pa
$A_{\text{bore}} = \frac{\pi}{4} D_{\text{int}}^2$	Aire de la section utile de l'âme	m ²
$\tau_v \equiv -\partial t_b / \partial v_0$	Sensibilité du temps de sortie à la vitesse initiale	s/(m/s)
<i>Cible et compensation</i>		
D	Distance de tir (50 m pour la discipline ISSF couché)	m
g	Accélération de la pesanteur ($\approx 9,81$ m/s ²)	m/s ²
$h_{\text{bal}}(v_0)$	Chute balistique à la distance D	m
θ_{out}	Angle de bouche au moment t_b : $\theta(L, t_b)$	rad
$\dot{\theta}_{\text{out}}^*$	Vitesse angulaire <i>cible</i> pour compensation complète	rad/s
<i>Simulation numérique</i>		
N	Nombre d'éléments finis	—
$L_e = L/N$	Longueur d'un élément ⁵	m
$[K], [M], [C]$	Matrices globales de raideur, masse, amortissement	—
$\{u(t)\}$	Vecteur des d.d.l. nodaux (translations + rotations)	—

3 Développement Mathématique

3.1 Modèle continu : poutre d'Euler–Bernoulli

On modélise le canon comme une poutre prismatique encastrée à la culasse ($x = 0$) et libre à la bouche ($x = L$), de section $A(x)$ et de moment quadratique $I(x)$ (admis constants par morceaux ; les profils *bull*, *sporter* et coniques se traitent par variation par élément). En notant $y(x, t)$ la déflexion transversale, l'équation aux dérivées partielles régissant les petites oscillations vaut :

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = q(x, t), \quad (1)$$

où $q(x, t)$ représente le chargement transverse linéique. Les conditions aux limites sont :

$$y(0, t) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0, \quad EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = M_t, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=L} = -F_t,$$

où M_t et F_t représentent respectivement le moment et la force appliqués par le tuner (incluant ses effets inertiels). Pour un canon de profil match à parois épaisses, l'hypothèse d'Euler–Bernoulli (sections planes restant planes et normales à la fibre neutre) reste raisonnable tant que $L/D_{\text{ext}} \gtrsim 20$; au-delà, un modèle de Timoshenko intégrant l'inertie de rotation et la déformation par cisaillement est préférable.

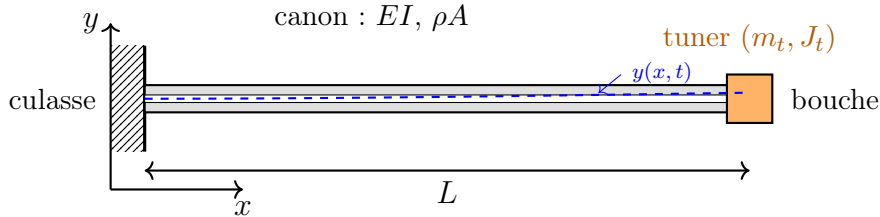


FIGURE 2 – Modèle du canon : poutre d'Euler-Bernoulli encastrée à la culasse ($x = 0$), libre à la bouche ($x = L$), portant à son extrémité une masse ponctuelle et son inertie de rotation (m_t, J_t) représentant le tuner. La courbe pointillée illustre une déflexion transversale $y(x, t)$.

3.2 Discrétisation par éléments finis

On cherche une solution faible de (1). En multipliant par une fonction test $w(x)$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant les conditions essentielles et en intégrant deux fois par parties sur $[0, L]$, on obtient la *formulation variationnelle* :

$$\int_0^L \rho A \ddot{y} w \, dx + \int_0^L EI y'' w'' \, dx = \int_0^L q w \, dx + [\text{termes de bord}]. \quad (2)$$

Le canon est partitionné en N éléments de longueur L_e . Sur chaque élément, on attribue deux degrés de liberté par nœud : la déflexion y et la rotation $\theta = y'$. On exprime le champ local $y_e(\xi)$, où $\xi \in [0, L_e]$ est la coordonnée locale, à l'aide des **fonctions de**

forme d'Hermitte cubiques :

$$y_e(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{u}_e, \quad \mathbf{u}_e = \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

avec

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= 1 - 3\bar{\xi}^2 + 2\bar{\xi}^3, & N_2(\xi) &= L_e(\bar{\xi} - 2\bar{\xi}^2 + \bar{\xi}^3), \\ N_3(\xi) &= 3\bar{\xi}^2 - 2\bar{\xi}^3, & N_4(\xi) &= L_e(-\bar{\xi}^2 + \bar{\xi}^3), \end{aligned}$$

où $\bar{\xi} = \xi/L_e$. Ces polynômes garantissent la continuité \mathcal{C}^1 aux nœuds, exigée par l'opérateur biharmonique de (2).

En reportant (3) dans (2), on obtient pour chaque élément la matrice de raideur élémentaire

$$[K]^e = \int_0^{L_e} EI (\mathbf{N}'')^\top \mathbf{N}'' d\xi = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ -12 & -6L_e & 12 & -6L_e \\ 6L_e & 2L_e^2 & -6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

et la matrice de masse cohérente

$$[M]^e = \int_0^{L_e} \rho A \mathbf{N}^\top \mathbf{N} d\xi = \frac{\rho A L_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L_e & 54 & -13L_e \\ 22L_e & 4L_e^2 & 13L_e & -3L_e^2 \\ 54 & 13L_e & 156 & -22L_e \\ -13L_e & -3L_e^2 & -22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Le vecteur de chargement nodal s'obtient analogiquement par $\mathbf{f}_e = \int_0^{L_e} q(\xi, t) \mathbf{N}^\top d\xi$.

3.3 Assemblage, conditions aux limites et intégration du tuner

Les matrices globales $[K]$ et $[M]$ de taille $2(N+1) \times 2(N+1)$ sont assemblées par sommation des contributions élémentaires sur les degrés de liberté partagés. L'encastrement à la culasse impose $y(0, t) = 0$ et $\theta(0, t) = 0$: on supprime les deux premières lignes et colonnes du système, ce qui définit les sous-matrices actives $[K]_a$ et $[M]_a$.

L'ajout du tuner à la bouche (dernier nœud d'indice $N+1$) se traduit par l'addition de sa masse m_t sur le degré de liberté de translation et de son moment d'inertie J_t (calculé autour de l'axe perpendiculaire à l'axe du canon, dans le plan de vibration) sur le degré de rotation :

$$[M]_a \longleftarrow [M]_a + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & m_t & 0 \\ & 0 & J_t \end{bmatrix}}_{\text{aux d.d.l. de la bouche}}. \quad (6)$$

Si le tuner est modélisé comme un cylindre de masse m_t , de rayon R_t et de longueur ℓ_t , son moment d'inertie autour de l'axe transverse passant par son centre de gravité vaut $J_t = m_t(3R_t^2 + \ell_t^2)/12$; un décalage d entre le centre de gravité du tuner et la bouche introduit un terme additionnel $m_t d^2$ (théorème d'Huygens) ainsi qu'un couplage masse-rotation $m_t d$ qu'il convient de prendre en compte pour un tuner long et déporté.

3.4 Modélisation de l'excitation dynamique

L'excitation $\{F(t)\}$ regroupe plusieurs contributions hétérogènes en amplitude et en bande spectrale :

(a) Pression des gaz et recul. La pression $p(t)$ dans la chambre engendre une force longitudinale appliquée à la culasse. Si l'arme est tenue de manière non parfaitement symétrique (ce qui est toujours le cas), cette force induit un moment transverse $M_0(t)$ au nœud d'encastrement. On modélise typiquement $p(t)$ par un profil de Pierret ou un ajustement gaussien sur les courbes pression-temps mesurées, d'amplitude pic $p_{\max} \sim 200$ MPa pour la .22 LR et de durée caractéristique $\sim 0,5$ ms.

Physiquement, ce moment n'est pas un artefact d'asymétrie de tenue : il existe même pour une arme tenue idéalement, car la *ligne de l'âme est décalée du centre de gravité* de l'arme. Suivant la modélisation de Kolbe [7], l'arme libre de masse m_r recule et tourne autour de son centre de gravité, situé à une distance h_{cg} sous l'axe de l'âme ; la force de recul $F_{\text{rec}}(t) = p(t) A_{\text{bore}}$ s'exerce donc avec ce bras de levier et imprime à la base du canon le moment

$$M_0(t) = p(t) A_{\text{bore}} h_{\text{cg}}, \quad (7)$$

tandis que l'amplitude angulaire résultante décroît comme $1/m_r$ (une arme lourde recule moins). Le modèle encastré ne contient pas le mouvement de corps rigide du recul ; on relie donc le bras de levier h_{offset} de la section 5.5 au moment de recul physique en factorisant sa dépendance,

$$h_{\text{offset}}(m_r, h_{\text{cg}}) = h_{\text{offset}}^{\text{réf}} \frac{h_{\text{cg}}}{h_{\text{cg}}^{\text{réf}}} \frac{m_r^{\text{réf}}}{m_r}, \quad (8)$$

où la *seule* constante $h_{\text{offset}}^{\text{réf}}$ est calée une fois pour toutes sur l'enveloppe vibratoire mesurée par Kolbe pour son arme de référence ($m_r^{\text{réf}} = 5$ kg, $h_{\text{cg}}^{\text{réf}} = 25,4$ mm). Au lieu de recalibrer pour chaque arme, on *prédit* alors la dépendance à deux grandeurs mesurables sur l'arme réelle — le poids total m_r (aisé à peser) et la distance h_{cg} de l'âme au centre de gravité (plus délicate, déterminée par équilibrage) : monter le même canon sur une arme plus légère, ou dont l'âme est plus haut placée au-dessus du centre de gravité, amplifie les vibrations et impose un nouveau réglage du tuner.

(a') Conditions aux limites : encastrement vs action souple. Le modèle ci-dessus suppose un encastrement parfait à la culasse ($y(0) = 0$, $\theta(0) = 0$). C'est une idéalisation : Kolbe [7] préfère ne *pas* bloquer la base et représente la souplesse de la boîte de culasse par un tronçon supplémentaire de poutre (~ 100 mm de long, ~ 38 mm de diamètre, alésage ~ 25 mm) ajouté à l'arrière, l'ensemble reculant *librement* dans l'espace (hypothèse *free recoil*, bien approchée par un tir au sac mais mise en défaut si une arme légère est fermement épaulée). Notre encastrement rigide surestime donc légèrement la fréquence fondamentale et ignore le mouvement de corps rigide du recul ; il reste néanmoins pertinent pour l'*angle relatif* de bouche $\theta(L, t)$, seule grandeur qui pilote la compensation (cf. section 5), et simplifie l'analyse modale. Le raffinement « action souple » constitue l'extension naturelle pour un travail quantitatif sur arme réelle.

(b) Charge mobile du projectile (effet de poids). Le projectile, de masse m_p , applique en sa position courante $x_p(t)$ une force transverse due à la gravité (poids) et à

l'engagement dans les rayures. En première approximation, on traite le projectile comme une force ponctuelle mobile :

$$q_p(x, t) = -m_p g \delta(x - x_p(t)), \quad (9)$$

où g est l'accélération de la pesanteur et δ la distribution de Dirac. Le vecteur nodal correspondant s'obtient en évaluant les fonctions de forme à la position $x_p(t)$.

(c) Couple gyroscopique des rayures. L'accélération angulaire imprimée par les rayures transmet un couple réactif au canon, modélisable comme un moment réparti proportionnel à $\dot{v}(x_p)$. Cet effet, plus faible que (a) et (b), peut être négligé en première analyse.

(d) Position du projectile. La cinématique interne $x_p(t)$ est obtenue par intégration de l'équation de l'écoulement interne :

$$m_p \ddot{x}_p = p(t) A_b - F_{\text{frot}}(x_p, \dot{x}_p), \quad (10)$$

où A_b est la section utile du tube et F_{frot} la résistance d'engagement. Le temps de sortie t_b vérifie $x_p(t_b) = L$; pour la .22 LR Match dans un canon de 26", $t_b \approx 1,5$ à 1,7 ms.

3.5 Schéma d'intégration temporelle de Newmark- β

L'équation semi-discrète de la structure s'écrit

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{F(t)\}, \quad (11)$$

où $[C]$ est usuellement modélisé par un amortissement de Rayleigh $[C] = \alpha_M[M] + \alpha_K[K]$ avec deux constantes (α_M, α_K) calibrées sur les taux d'amortissement modaux mesurés ($\zeta_1 \sim 0,5\%$ à 1% pour un canon en acier).

On utilise le schéma implicite de Newmark- β pour avancer du pas n au pas $n + 1$ (Δt) :

$$\{u_{n+1}\} = \{u_n\} + \Delta t \{\dot{u}_n\} + \frac{\Delta t^2}{2}((1 - 2\beta)\{\ddot{u}_n\} + 2\beta \{\ddot{u}_{n+1}\}), \quad (12)$$

$$\{\dot{u}_{n+1}\} = \{\dot{u}_n\} + \Delta t ((1 - \gamma)\{\ddot{u}_n\} + \gamma \{\ddot{u}_{n+1}\}), \quad (13)$$

dans lesquelles $\{\ddot{u}_{n+1}\}$ est obtenu en réinjectant (12) dans (11) évaluée en t_{n+1} , ce qui conduit au système linéaire :

$$\left([M] + \gamma \Delta t [C] + \beta \Delta t^2 [K] \right) \{\ddot{u}_{n+1}\} = \{F_{n+1}\} - [C]\{\dot{u}_n^*\} - [K]\{u_n^*\}, \quad (14)$$

où $\{u_n^*\}$ et $\{\dot{u}_n^*\}$ sont les prédicteurs construits à partir des valeurs courantes. Le couple classique $(\gamma, \beta) = (1/2, 1/4)$ (*average constant acceleration*) est *inconditionnellement stable* et conserve l'énergie sans dissipation numérique ; il est privilégié ici pour préserver fidèlement l'amplitude des modes excités. Le pas de temps doit néanmoins résoudre la fréquence d'intérêt la plus élevée : on prendra $\Delta t \lesssim T_{\text{max}}/20$, où T_{max} est la période du plus haut mode physiquement significatif (typiquement quelques kHz pour un canon, donc $\Delta t \sim 10 \mu\text{s}$).

4 Analyse modale et sensibilité au tuner

4.1 Problème aux valeurs propres

En l'absence d'amortissement et d'excitation, on cherche des solutions harmoniques $\{u(t)\} = \{\phi\} e^{i\omega t}$, ce qui ramène (11) à un problème aux valeurs propres généralisé :

$$([K] - \omega^2[M]) \{\phi\} = \mathbf{0}. \quad (15)$$

Les solutions $(\omega_n^2, \{\phi_n\})$ donnent les pulsations propres ω_n et les modes propres $\{\phi_n\}$. Les fréquences en hertz sont $f_n = \omega_n/(2\pi)$. Pour le canon de référence du simulateur (acier, $L = 0,66$ m, $D_{\text{ext}} = 24$ mm cylindrique, $D_{\text{int}} = 5,6$ mm), une résolution MEF à 20 éléments donne les premiers modes suivants :

Mode	Canon nu	Tuner 200 g	Tuner 400 g
f_1 (Hz)	39,87	34,16	30,33
f_2 (Hz)	230,1	217,66	206,9
f_3 (Hz)	633,5	602,39	575,1
f_4 (Hz)	$\approx 1,19$ kHz	1,14 kHz	1,09 kHz
f_5 (Hz)	$\approx 1,87$ kHz	1,79 kHz	1,72 kHz

La solution analytique pour la poutre cantilever nue, $f_1 = \frac{1,875^2}{2\pi} \sqrt{EI/(\rho AL^4)}$, donne $f_1 \approx 40,0$ Hz, en parfait accord avec le calcul MEF (39,87 Hz). L'ajout d'un tuner de 200 g à la bouche fait chuter f_1 d'environ 14 % (de 39,9 à 34,2 Hz) ; un tuner de 400 g donne une réduction de 24 %. Cette plage couvre largement la fenêtre temporelle utile autour de $t_b \approx 2-3$ ms.

4.2 Sensibilité par le quotient de Rayleigh

Le *quotient de Rayleigh* associé au mode n s'écrit

$$\omega_n^2 = \frac{\{\phi_n\}^\top [K] \{\phi_n\}}{\{\phi_n\}^\top [M] \{\phi_n\}}. \quad (16)$$

Soit $\phi_n^{(L)}$ la composante du mode au nœud de bouche (en translation). Une perturbation δm_t de la masse du tuner modifie $[M]$ de $\delta m_t \phi_n^{(L)2}$ sur le dénominateur, sans toucher à $[K]$. À l'ordre un, on obtient :

$$\frac{d\omega_n^2}{dm_t} \approx -\omega_n^2 \frac{|\phi_n^{(L)}|^2}{\{\phi_n\}^\top [M] \{\phi_n\}} \leq 0. \quad (17)$$

Deux conclusions importantes en découlent :

1. L'ajout de masse à la bouche *abaisse* toujours la fréquence (signe négatif).
2. L'abaissement est d'autant plus marqué que le mode présente une grande amplitude à la bouche. Pour le mode fondamental d'une poutre encastree-libre, $\phi_1^{(L)}$ est maximal, donc f_1 chute fortement ; pour le mode 2, le nœud vibratoire se rapproche de la bouche, et l'effet du tuner est plus modeste.

Ces propriétés fondent le mécanisme d'accord : en déplaçant la position d'une masse mobile (ou en empilant des masselottes), le tireur balaye continûment f_1 sur une plage typique de l'ordre de ± 15 à ± 30 %.

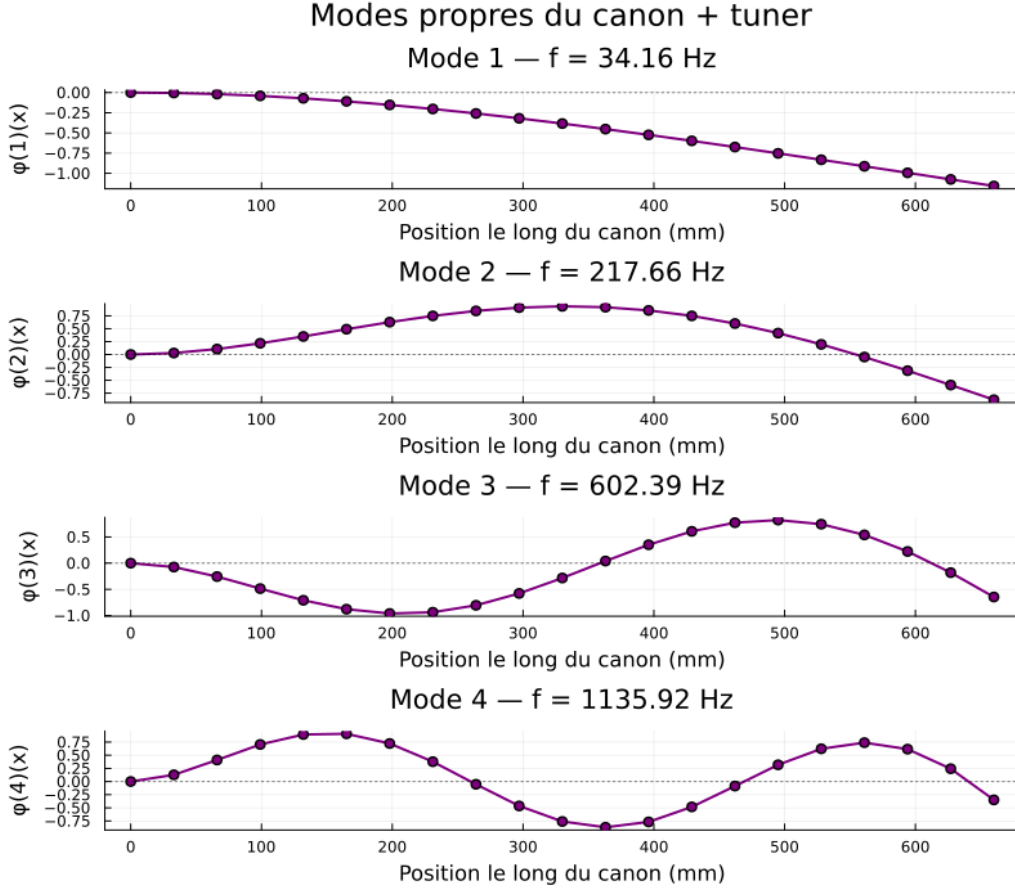


FIGURE 3 – Quatre premiers modes propres $\phi_n(x)$ du canon muni d'un tuner de 200 g (calcul MEF, 20 éléments). On notera la déformée monotone du mode 1 (ventre spatial à la bouche), et le rapprochement progressif des nœuds spatiaux des modes supérieurs vers la bouche, conséquence de la concentration de masse à $x = L$.

4.3 Décomposition modale et réponse en régime transitoire

En décomposant la réponse sur la base des modes propres normalisés en masse, $\{u(t)\} = \sum_n q_n(t)\{\phi_n\}$, l'équation (11) se découple en

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = f_n(t), \quad f_n(t) = \{\phi_n\}^\top \{F(t)\}. \quad (18)$$

Pour une excitation impulsionnelle (la signature pression+projectile s'apparente à une impulsion de quelques centaines de microsecondes), chaque mode démarre un régime oscillatoire libre. La réponse globale à la bouche en rotation est alors

$$\theta(L, t) = \sum_n \phi_n^{\theta(L)} q_n(t), \quad (19)$$

où $\phi_n^{\theta(L)}$ est la composante de rotation du mode n au nœud de bouche. En pratique, le premier mode domine la cinématique de bouche aux temps caractéristiques $\sim t_b$; c'est donc essentiellement son réglage qui est ciblé par le tuner.

Régime transitoire, et non onde stationnaire établie. Une mise en garde s'impose, dont Kolbe [7] fait le cœur de son argumentaire : il est tentant de représenter «

la façon dont vibre un canon » par les *solutions analytiques en ondes stationnaires* de l'équation des poutres. Or ces ondes ne se forment *pas* pendant la fenêtre utile. Leur vitesse de phase est trop faible pour qu'un régime stationnaire ait le temps de s'établir sur la durée $t_b \approx 1\text{--}3$ ms du passage de la balle : à cet instant, le canon est encore dans la *réponse transitoire* au moment impulsif de recul, et non dans un régime périodique installé. C'est précisément pourquoi le découpage modal ci-dessus est exploité ici en *réponse forcée transitoire* (intégrée pas à pas par Newmark- β) plutôt qu'en superposition de modes d'amplitudes figées, et pourquoi le raisonnement de la section 5.3 privilégie le *nœud temporel* (l'état instantané de l'oscillation à t_b) sur le nœud spatial (propriété d'un mode pleinement établi).

5 Cinématique de bouche et compensation positive

5.1 Temps de parcours et angle de bouche

Soit $v(x, t)$ la vitesse du projectile à l'abscisse x ; le temps de sortie vaut

$$t_b = \int_0^L \frac{dx}{v(x)}. \quad (20)$$

L'angle effectif de lancement, à la sortie, s'écrit

$$\theta_{\text{out}} = \theta(L, t_b) = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=L, t=t_b}. \quad (21)$$

Une variation $\Delta\theta_{\text{out}}$ entraîne un déplacement vertical sur cible (à la distance D , sans correction balistique au premier ordre) :

$$\Delta h \approx D \Delta\theta_{\text{out}}. \quad (22)$$

La géométrie sous-jacente est celle de la figure 1 de la vulgarisation : ce que la section 1 décrivait qualitativement est ici reformulé en termes d'angle de bouche et d'effet sur cible.

5.2 Couplage entre dispersion de vitesse et dispersion verticale

Une variation Δv_0 de la vitesse initiale induit deux effets cumulés :

1. *Chute balistique additionnelle.* À la distance D , pour une trajectoire tendue, la chute sous la ligne de visée s'écrit $h_{\text{bal}}(v_0) \simeq gD^2/(2v_0^2)$, d'où

$$\frac{\partial h_{\text{bal}}}{\partial v_0} \simeq -\frac{gD^2}{v_0^3} < 0. \quad (23)$$

Numériquement, à $D = 50$ m et $v_0 \approx 308$ m/s (1010 ft/s, .22 LR Match), $\partial h_{\text{bal}}/\partial v_0 \approx -0,84$ mm/(m/s), soit environ $-0,016$ MOA par ft/s ; ce nombre est aussi celui calculé par Kolbe [5] à partir d'un solveur de trajectoire balistique.

2. *Décalage du temps de sortie.* La cinématique interne couple t_b et v_0 : à la limite, $t_b \propto 1/v_0$ donne $\partial t_b/\partial v_0 = -t_b/v_0$, mais la dépendance réelle est plus marquée car une charge plus énergétique augmente la pression *partout* dans le tube et raccourcit t_b davantage qu'un simple rapport cinématique. On notera donc

$$\tau_v \equiv -\frac{\partial t_b}{\partial v_0} > 0, \quad (24)$$

quantité directement mesurable à l'aide d'un chronographe couplé à un capteur de sortie de bouche. Kolbe rapporte [5], pour Eley Tenex en canon de 26",

$$\tau_v \approx \frac{1 \text{ ms}}{375 \text{ ft/s}} = \frac{1 \text{ ms}}{114 \text{ m/s}} \approx 8,8 \mu\text{s} / (\text{m/s}), \quad (25)$$

et avance que cette valeur est, à $\pm 10\%$ près, une constante pour les canons rimfire de plus de 6 pouces.

La condition de compensation positive impose l'égalité des deux contributions en cible :

$$\boxed{\left. \frac{d\theta_{\text{out}}}{dt} \right|_{t_b} \cdot \Delta t_b + \frac{1}{D} \frac{\partial h_{\text{bal}}}{\partial v_0} \Delta v_0 = 0.} \quad (26)$$

En substituant $\Delta t_b = -\tau_v \Delta v_0$ et (23), on obtient la *vitesse angulaire optimale* à la bouche au moment de la sortie :

$$\dot{\theta}_{\text{out}}^* = \frac{1}{D \tau_v} \frac{\partial h_{\text{bal}}}{\partial v_0} = -\frac{g D}{v_0^3 \tau_v}. \quad (27)$$

Le signe négatif de $\partial h_{\text{bal}}/\partial v_0$ et de $\partial t_b/\partial v_0$ se composent pour rendre $\dot{\theta}_{\text{out}}^*$ positif : la bouche doit donc se relever ($\theta > 0$) au moment du départ du coup. Numériquement, avec $D = 50 \text{ m}$, $v_0 = 308 \text{ m/s}$ et $\tau_v = 8,8 \mu\text{s}/(\text{m/s})$:

$$\dot{\theta}_{\text{out}}^* \approx 1,9 \text{ mrad/ms} \approx 6,6 \text{ MOA/ms},$$

à comparer aux 6,0 MOA/ms mesurés expérimentalement par Kolbe (l'écart de l'ordre de 10 % s'explique par la non-tendance de la trajectoire à 50 m et par les approximations sur τ_v).

5.3 Nœud spatial vs nœud temporel : précision sémantique

Le vocabulaire de *nœud* et *ventre*, hérité de l'acoustique des ondes stationnaires, prête souvent à confusion lorsqu'il est appliqué au tir. Deux significations physiquement distinctes coexistent :

Nœud/ventre spatial — points particuliers du *mode propre* $\phi_n(x)$ le long du canon : un *nœud spatial* est un x^* tel que $\phi_n(x^*) = 0$ (déplacement transverse nul) ; un *ventre spatial* est un x^* où $|\phi_n|$ atteint un maximum local. Pour le mode fondamental d'une poutre encastree-libre, le profil est monotone croissant de 0 (encastrement) à $\phi_1(L)$ (bouche). **La bouche est donc, par construction, un ventre spatial du mode 1.** Aucun choix de tuner ne déplace cette propriété : la bouche reste là où la balle sort, à $x = L$.

Les modes supérieurs ($n \geq 2$) présentent en revanche des nœuds spatiaux à l'intérieur du canon. Placer le tuner précisément à un nœud spatial du mode n rend ce mode insensible à la masse ajoutée (cf. extension de (17) à une masse positionnée hors de $x = L$). C'est l'astuce des tuners dits *harmoniquement neutralisés* : on peut ajuster f_1 sans remuer f_2 ou f_3 , ce qui rend le réglage plus monotone et reproductible.

Nœud/ventre temporel — points particuliers de l’oscillation *dans le temps* de l’angle de bouche $\theta(L, t)$: un *nœud temporel* est un instant t^* où $\theta(L, t^*) = 0$ (passage par zéro) ; un *ventre temporel* est un instant où $|\theta(L, t)|$ atteint un maximum (i.e. $\dot{\theta}(L, t^*) = 0$). Pour un mode 1 quasi-sinusoidal, ces deux types d’instant alternent à un quart de période.

Le critère (27) se traduit alors sans ambiguïté :

Instant de sortie t_b	$\theta(L, t_b)$	$\dot{\theta}(L, t_b)$
Ventre temporel (<i>antinode</i>)	$\pm\Theta_1$ (max)	0
Nœud temporel (<i>node</i>)	0	$\pm\Theta_1 \omega_1$ (max)

La compensation positive exige une sortie au voisinage d’un *nœud temporel ascendant*, là où $\theta = 0$ et $\dot{\theta} > 0$ au maximum. Sortir au sommet de l’oscillation (ventre temporel) est, au contraire, le *pire* cas : non seulement $\dot{\theta} = 0$ annule toute compensation, mais on tire en plus avec un écart angulaire statique maximal qui décale le point d’impact moyen.

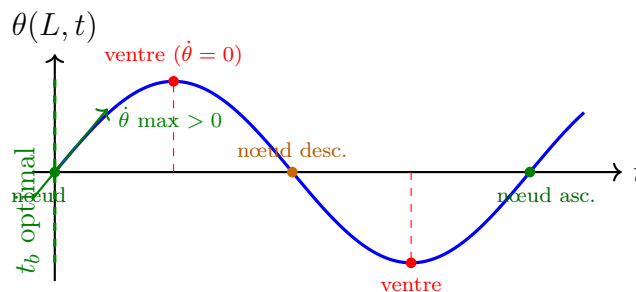


FIGURE 4 – Distinction nœud / ventre temporel sur l’angle de bouche $\theta(L, t)$. La compensation positive impose t_b au voisinage d’un *nœud temporel ascendant* (point vert à $t = 0$ et $t = T_1$), où $\theta = 0$ mais $\dot{\theta}$ est maximal et positif. Sortir au ventre temporel (points rouges, $\dot{\theta} = 0$) annule la compensation.

Ce qu’on appelle « upward swing of the vibration at the muzzle » dans Kolbe [5, 6] correspond précisément à ce *nœud temporel ascendant*. Dans le jargon des compétiteurs (méthode *ladder* ou *OCW* [9]), le « node » d’accord désigne plus largement une zone de *robustesse* de groupement, c’est-à-dire un plateau autour duquel un petit décalage de t_b ne dégrade pas le groupement. Au sens strict de la mécanique vibratoire, ce plateau est précisément la fenêtre autour d’un nœud temporel ascendant — où $\ddot{\theta}(L, t_b)$ est proche de zéro et $\dot{\theta}(L, t_b)$ stationne près de sa valeur extrême, ce qui rend le tuning peu sensible aux fluctuations de t_b .

5.4 Confirmation expérimentale (Kolbe, 2015)

Kolbe [6] a vérifié directement le critère (27) sur un banc instrumenté mesurant l’angle de bouche par voie optique (polariseur croisé) avec une porte photo-déetectrice repérant l’instant exact de sortie. Sur un canon Border de 26", calibre .22 LR, munition Eley EPS Tenex, deux configurations sont comparées :

Configuration	$\dot{\theta}(L, t_b)$ mesuré	Groupements en cible
Canon nu	-9,4 MOA/ms (bouche descendante)	cordon <i>vertical</i> marqué
Canon + tuner 200 g	+6,0 MOA/ms (bouche ascendante)	groupements <i>ronds</i>

La valeur +6,0 MOA/ms coïncide avec le critère (27) pour 50 m et la munition employée. L'élimination quasi-complète du cordonnement vertical confirme expérimentalement que le critère est non seulement nécessaire (signe) mais également suffisant (magnitude) lorsque les modes d'ordre supérieur restent faiblement excités.

En particulier, Kolbe note que la *vitesse de translation verticale* $\dot{y}(L, t_b)$ de la bouche contribue de manière négligeable à la dispersion en cible, comparée à $\dot{\theta}(L, t_b)$: c'est bien la *rotation* de la bouche, et non sa translation, qui détermine l'angle de lancement effectif. Ce constat justifie *a posteriori* le découpage d.d.l. (translation + rotation) du modèle MEF, et oriente le contrôle vers l'extraction de la composante rotationnelle au nœud terminal.

5.5 Validation par simulation MEF + Newmark- β

Le simulateur en `Julia` associé à ce document (`simulation.jl`) implémente l'ensemble du formalisme : assemblage MEF, encastrement, tuner, balistique interne (modèle exponentiel calé sur t_b et v_{muzzle}), excitation par moment de recul à la culasse $M(t) = p(t) A_{\text{bore}} h_{\text{offset}}$, charge mobile du projectile, amortissement de Rayleigh et schéma de Newmark- β . Le bras de levier h_{offset} est calibré automatiquement pour reproduire l'enveloppe vibratoire mesurée par Kolbe (~ 10 MOA/ms en pic).

Ces tracés illustrent une distinction essentielle pour le tireur : le tuner agit *principalement sur le point d'impact moyen* (via $\theta(L, t_b)$) et *secondairement sur la dispersion verticale* (via $\dot{\theta}(L, t_b)$). Lorsque $t_b \ll T_1$, la fenêtre d'optimalité en $\dot{\theta}$ est large et plate ; le réglage du tuner sert alors surtout à compenser la dispersion de vitesse, le réglage du visage prenant en charge le décalage du POI.

6 Conclusions pratiques pour le tireur

Le formalisme précédent, validé numériquement par la simulation par éléments finis, conduit à plusieurs conclusions exploitables.

1. Effet d'une masse de bouche. L'ajout d'une masse à la bouche *abaisse* la fréquence fondamentale (cf. (17)). Pour le canon de référence, la plage d'accord d'un tuner de 100–400 g couvre une variation de f_1 de l'ordre de 8 à 24 % (39,9 Hz \rightarrow 30,3 Hz). Le décalage temporel équivalent dans le cycle vibratoire est de l'ordre de quelques fractions de milliseconde, ce qui suffit à balayer l'intégralité de la fenêtre d'optimalité dans laquelle $t_b \approx 2\text{--}3$ ms doit être positionné.

2. Sens du réglage. Allonger la position effective du tuner (le visser vers l'extérieur) augmente J_t et le bras de levier, ce qui amplifie l'effet de la masse et abaisse f_1 . C'est le geste qui « ralentit » la cinématique de bouche et retarde le passage par zéro de $\theta(L, t)$: utile pour des munitions plus lentes (sortie t_b retardée).

3. Sensibilité à la munition. Tout changement de lot ou de marque modifie \bar{v} et donc t_b . La fenêtre d'optimalité ($\dot{\theta}_{\text{out}}$ proche de $\dot{\theta}_{\text{out}}^*$) est étroite : un décalage de 0,1 ms sur t_b peut représenter une fraction non négligeable de la période $T_1 = 2\pi/\omega_1$. Tout nouveau lot doit donc faire l'objet d'un retuning systématique au pas de tuner (méthode *ladder tune* ou *Audette*).

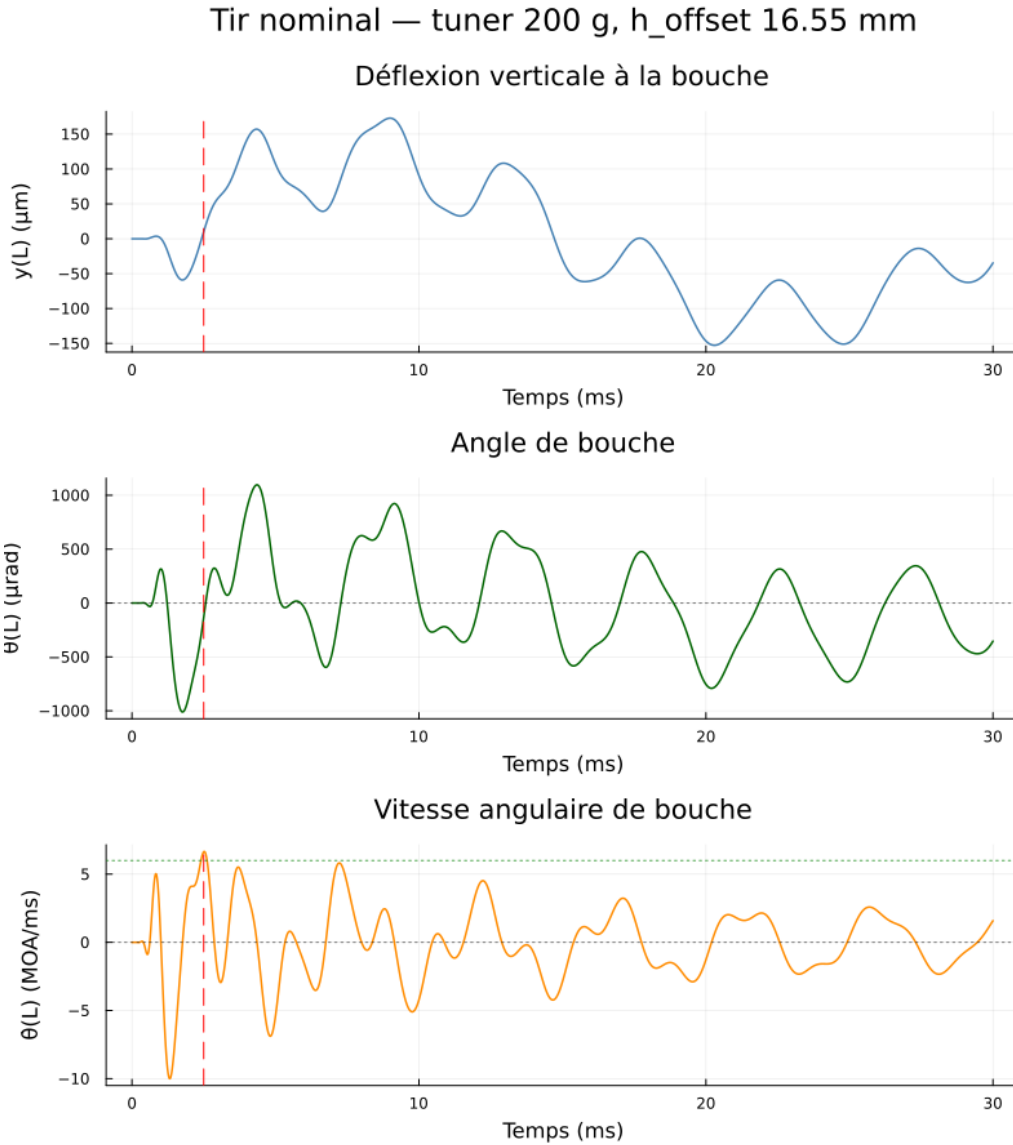


FIGURE 5 – Réponse transitoire simulée pour la configuration nominale (tuner 200 g, $h_{\text{offset}} = 16,5$ mm). De haut en bas : déflexion $y(L, t)$, angle de bouche $\theta(L, t)$, et vitesse angulaire $\dot{\theta}(L, t)$. Le trait rouge pointillé marque $t_b = 2,5$ ms ; le trait vert pointillé sur le panneau inférieur indique la cible Kolbe (6 MOA/ms). La valeur calculée à t_b est de +6,64 MOA/ms, en accord à $\sim 10\%$ avec la mesure.

4. Limites physiques. Le tuner ne supprime pas la dispersion intrinsèque de la munition : il convertit une dispersion verticale en un groupement réellement plus serré uniquement si (26) est vérifiée à \pm quelques MOA/ms près. La dispersion horizontale, indépendante du couple $(\Delta v_0, \theta_{\text{out}})$, n'est pas compensée. Le gain attendu en cible reste donc borné par les autres sources d'erreur (vent, plomb de balle, parallaxe, mire).

5. Robustesse aux modes supérieurs. Les modes 2 et 3, de fréquences nettement plus élevées (cf. tableau précédent), produisent une oscillation rapide superposée sur $\theta(L, t)$. S'ils sont mal amortis et excités significativement, ils créent une variabilité résiduelle (*flyers*) même après tuning. Une masse à la bouche distincte d'un harmonique entier du mode 1 (anti-résonance) aide à les filtrer, ce qui motive les conceptions « accordable » à

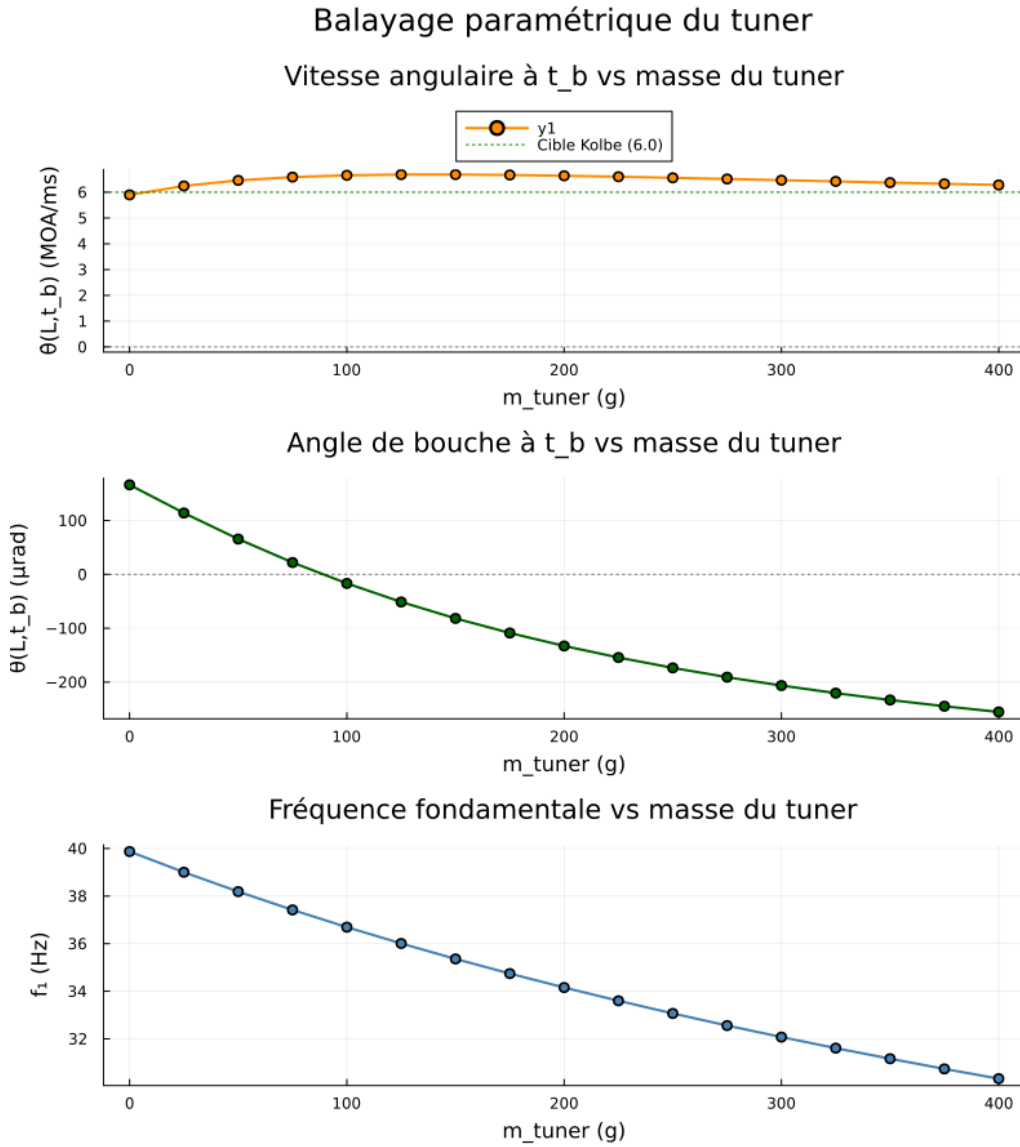


FIGURE 6 – Balayage paramétrique sur la masse du tuner $m_t \in [0, 400]$ g (autres paramètres fixes). De haut en bas : (i) $\dot{\theta}(L, t_b)$ varie peu (5,9 à 6,7 MOA/ms) car $t_b/T_1 \approx 0,085$ reste dans le quart de cycle ascendant initial ; (ii) $\theta(L, t_b)$ varie en revanche fortement et monotoniquement (+166 à -255 μrad), traduisant un décalage du point d’impact moyen ; (iii) f_1 décroît monotoniquement de 39,9 à 30,3 Hz (relation prévue par le quotient de Rayleigh, équation (17)).

double anneau.

6. Domaine de validité : centerfire vs rimfire. Une réserve d’honnêteté, formulée par Kolbe lui-même [7], mérite d’être rapportée. Le *principe* de compensation positive (sections 1 et 5) est général et fut d’abord établi pour le rimfire. En revanche, le *modèle d’excitation par moment impulsionnel de recul* retenu ici (et dans le simulateur de Kolbe) est avant tout pertinent pour les calibres *centerfire* : la courbe pression-temps y est longue (~ 1 ms, pic ~ 350 MPa $\approx 50\,000$ psi, profil type .308 Win) et le recul élevé, si bien que le moment de recul domine effectivement la mise en vibration. Pour la *.22 LR*, l’impulsion de pression est si brève que, selon Kolbe, le moment de recul seul reproduit mal les vibrations

observées : d'*autres* sources d'excitation (engagement dans les rayures, effet de poids du projectile mobile, jeux de l'assemblage) y prennent une part comparable. Notre modèle les intègre partiellement — c'est tout l'objet des contributions (b) et (c) de la section 3.4, absentes du simulateur originel de Kolbe — mais les valeurs numériques rimfire avancées dans ce document doivent être lues comme des *ordres de grandeur calibrés*, non comme des prédictions absolues. La validation expérimentale directe (section 5.5) reste la référence pour le rimfire.

Bibliographie

Références

- [1] S. S. Rao, *Mechanical Vibrations*, Pearson, 2017.
- [2] L. Meirovitch, *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, 1986.
- [3] K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures*, 2nd ed., Prentice Hall, 2014.
- [4] D. Carlucci and S. Jacobson, *Ballistics : Theory and Design of Guns and Ammunition*, 3rd ed., CRC Press, 2018.
- [5] G. Kolbe, *Using barrel vibrations to tune a barrel — The Vibrations of a Barrel Tuned for Positive Compensation*, Border Barrels, 2015.
- [6] G. Kolbe, *The Vibrations of a Barrel Tuned for Positive Compensation* (article en ligne, mise à jour du 18 novembre 2015),
http://www.geoffrey-kolbe.com/articles/rimfire_accuracy/tuning_a_barrel.htm.
- [7] G. Kolbe, *Barrel Vibrations Simulator* (modèle « lumped parameter » par éléments finis et notes de modélisation, en ligne, consulté en juin 2026),
http://www.geoffrey-kolbe.com/articles/rimfire_accuracy/barrel_vibrations.htm.
- [8] A. Mallock, *Vibrations of Rifle Barrels*, Proceedings of the Royal Society, Vol. 68, p. 327, 1901.
<https://www.tireur.org/articles/Mall01.pdf>.
- [9] C. Audette, *The Optimum Charge Weight (OCW) Method*, *Precision Shooting Magazine*, 2005–2010.
- [10] N. M. Newmark, *A Method of Computation for Structural Dynamics*, ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division, 85(3), pp. 67–94, 1959.